УДК 517.98

Математический маятник на двумерных алгебрах [5]

© Н. А. Малашонок, В. С. Боровенникова

Ключевые слова: математический маятник, алгебры обобщенных комплексных чисел

Рассматривается аналог классической задачи о математическом маятнике, то есть движении по окружности под действием силы тяжести, на двумерных алгебрах обобщенных комплексных чисел.

An analogue of classic problem – the problem of simple pendulum, i.e. the moving over the circle under the action of gravity, – is considered on the two-dimensional algebras of general complex numbers.

§ 1. Двумерные алгебры обобщенных комплексных чисел

Рассмотрим алгебры $\mathcal{A}$ чисел $x + iy$, $i^2 = \alpha + 2i\beta$. Это – эллиптические числа, если $\alpha + \beta^2 < 0$, например, комплексные: $i^2 = -1$; гиперболические, если $\alpha + \beta^2 > 0$, например, двойные: $i^2 = 1$; параболические, если $\alpha + \beta^2 = 0$, например, дуальные: $i^2 = 0$. Эти числа естественным образом изображаются точками (векторами) $z = (x, y)$ плоскости, эту плоскость обозначаем так же $\mathcal{A}$.

Определим скалярное произведение векторов $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ на $\mathcal{A}$ следующим образом:

$$(z_1, z_2) = x_1x_2 + \beta(x_1y_2 + x_2y_1) - \alpha y_1y_2.$$

Соответствующая метрика задается матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}.$$

Для параболических чисел метрика вырожденная.

Рассмотрим кривую $t \mapsto z(t)$, $t \in [t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$, $r(t) \in \mathcal{A}$. Касательный вектор для всех алгебр определяется так:

$$\tau = \dot{z}(t).$$

[5]Работа поддержана грантами: РФФИ 08-07-97507 р_центр_а, Научной Программой "Развитие Научного Потенциала Высшей Школы" РНП.2.1.1.351 и Темпланом 1.5.07.

Градиент функции на непараболической алгебре имеет вид:

$$\operatorname{grad} f = \frac{1}{\alpha + \beta^2}\Big(-\alpha\frac{\partial f}{\partial x} - \beta\frac{\partial f}{\partial y}, -\beta\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\Big),$$

на параболической :

$$\operatorname{grad} f = \Big(\beta^2\frac{\partial f}{\partial x} - \beta\frac{\partial f}{\partial y}, -\beta\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\Big).$$

Движение точки – это отображение $t \mapsto z(t)$, $t \in [t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$, $z(t) \in \mathcal{A}$. Скорость определяется стандартным образом – это касательный вектор к траектории:

$$\dot{z}(t) = \big(\dot{x}(t), \dot{y}(t)\big).$$

Определим на $\mathcal{A}$ функцию $\exp z$ как сумму ряда $\sum(z^n/n!)$.

Пусть G – группа "движений" алгебры $\mathcal{A}$: она порождается параллельными сдвигами и умножениями на $\exp i\varphi$ ("вращениями"). Пусть ∇ – инвариантная относительно G аффинная связность. Ускорение $\widetilde{z} = (\widetilde{x}, \widetilde{y})$ определяется формулой:

$$\widetilde{z} = \nabla_{\dot{z}}\dot{z}$$

На алгебрах эллиптических и гиперболических чисел инвариантные аффинные связности нулевые, поэтому ускорение задается обычной формулой:

$$\ddot{z}(t) = \big(\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)\big).$$

На алгебре параболических чисел инвариантные аффинные связности зависят от трех вещественных параметров (см. например, [1]):

$$\nabla_{\partial/\partial x} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad \nabla_{\partial/\partial y} = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix},$$

со следующими соотношениями между параметрами A, B, C, D, P, Q, R, S:

$$\begin{array}{rcl} A &=& -6\beta^2 C + D + R, \\ B &=& -2\beta^2 C + \beta R, \\ P &=& -2\beta^2 C + \beta D, \\ Q &=& -\beta^3 C, \\ S &=& -\beta^2 C + \beta(D + R), \end{array}$$

Поэтому ускорение определяется следующим образом:

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{x} &=& \ddot{x} + A\dot{x}^2 + (B + P)\dot{x}\dot{y} + Q\dot{y}^2 \\ \widetilde{y} &=& \ddot{y} + C\dot{x}^2 + (D + R)\dot{x}\dot{y} + S\dot{y}^2. \end{array}$$

Рассмотрим одну из классических задач механики – задачу о математическом маятнике – на алгебре $\mathcal{A}$.

Маятник – это движение по окружности под действием силы тяжести: движение на плоскости с одной связью – расстояние от точки до начала координат постоянно и равно l, под действием силы $P = (0, -mg)$.

§ 2. Математический маятник на плоскости двойных чисел

Сначала рассмотрим плоскость двойных чисел. На плоскости двойных чисел можно рассматривать окружности двух типов: $x^2 - y^2 = l^2$ и $y^2 - x^2 = l^2$. Будем рассматривать окружность первого типа и два вида движений - по верхней $(y > 0)$ по нижней $(y < 0)$ ветвям.

I. Движение по нижней ветви.

Пусть m – масса точки $z = (x, y)$. Кривая, по которой движется точка, определена уравнением:

$$\sqrt{y^2 - x^2} - l = 0.$$

По принципу освобождения от связей, действие звязи $f(x, y) = 0$ заменяется реакцией связи – силой, пропорциональной $\operatorname{grad} f$. Уравнения движения запишутся следующим образом:

$$\begin{cases} m\ddot{z} = F + \lambda \operatorname{grad} f \\ \sqrt{y^2 - x^2} - l = 0. \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} m\ddot{y} = -\lambda \dfrac{x}{\sqrt{y^2 - x^2}} \\ m\ddot{z} = -mg - \lambda \dfrac{y}{\sqrt{y^2 - x^2}} \\ \sqrt{z^2 - y^2} - l = 0. \end{cases}$$

Переходим к полярной системе координат в плоскости xOy:

$$\begin{cases} x = l\text{sh}\varphi \\ y = -l\text{ch}\varphi. \end{cases}$$

Получим

$$\begin{cases} m\big(l\text{sh}\varphi\dot{\varphi}^2 + l\text{ch}\varphi\ddot{\varphi}\big) = -\lambda\text{sh}\varphi \\ m\big(-l\text{ch}\varphi\dot{\varphi}^2 - l\text{sh}\varphi\ddot{\varphi}\big) = -mg + \lambda\text{ch}\varphi. \end{cases}$$

После преобразований имеем

$$ml\ddot{\varphi} = -mg\text{sh}\varphi. \qquad (1)$$

Обозначая $\dfrac{g}{l} = w^2$ и интегрируя один раз уравнение (1), получим

$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + w^2\text{ch}\varphi = h, \quad h = const,$$

и, наконец,
$$\dot{\varphi} = \pm\sqrt{2(h - w^2 \mathrm{ch}\varphi)}. \tag{2}$$

Возможны два случая.

1)$h > w^2$. Тогда существует такое φ_0, что $h/w^2 = \mathrm{ch}\varphi_0$. При этом (2) возможно, если $\mathrm{ch}\varphi \leqslant \varphi_0$. Маятник совершает "колебательное"движение, при котором φ изменяется от $-\varphi_0$ до φ_0 и наоборот, что соответствует знакам "+"или "$-$"в равенстве (2).

Период T полного "колебания" равен
$$T = 4\int_0^{t_0} dt = 4\int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(h - w^2\mathrm{ch}\varphi)}}.$$
Обозначая $\mathrm{sh}\,\dfrac{\varphi_0}{2} = k$ и делая замену переменной $u = \dfrac{1}{k}\,\dfrac{\mathrm{sh}(\varphi/2)}{\mathrm{sh}(\varphi_0/2)}$, получим полный эллиптический интеграл
$$\frac{2}{w}\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1+k^2u^2}\sqrt{1-u^2}}.$$
Делая стандартные вычисления, находим
$$T = \frac{4\pi}{w\sqrt{1+k^2}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\Big(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\Big)^2\Big(\frac{k^2}{1+k^2}\Big)^n.$$

2)$h = w^2$. Из (2) следует, что $\varphi \equiv 0$, то есть маятник находится в состоянии покоя.

II. Движение по верхней ветви.

В этом случае координаты точки z записываются так:
$$\begin{cases} x = l\,\mathrm{sh}\,\varphi \\ y = l\mathrm{ch}\varphi. \end{cases}$$

Аналогичными рассуждениями приходим к системе
$$\begin{cases} m\big(l\mathrm{sh}\varphi\dot{\varphi}^2 + l\mathrm{ch}\varphi\ddot{\varphi}\big) = -\lambda\mathrm{sh}\varphi \\ m\big(l\mathrm{ch}\varphi\dot{\varphi}^2 + l\mathrm{sh}\varphi\ddot{\varphi}\big) = -mg - \lambda\mathrm{ch}\varphi. \end{cases},$$
а затем к уравнению
$$ml\ddot{\varphi} = mg\mathrm{sh}\varphi.$$
Интегрируя, получим:
$$\dot{\varphi} = \pm\sqrt{2(h + w^2\mathrm{ch}\varphi)}, \quad h = const. \tag{3}$$

Рассмотрим несколько случаев.

1) $h < -w^2$. Тогда существует φ_0 такое, что $-h/w^2 = \mathrm{ch}\varphi_0$. При этом должно выполняться $\mathrm{ch}\varphi \geqslant \mathrm{ch}\varphi_0$ – точка из позиции $\varphi = \varphi_0$ уходит вверх на бесконечность.

Найдем время T движения маятника, то есть вычислим интеграл:

$$T=\int_0^{t_0}dt=\int_{\varphi_0}^{\infty}\frac{d\varphi}{\sqrt{2(h+w^2\mathrm{ch}\varphi)}}.$$

Как и в первом случае, приходим к полному эллиптическому интегралу

$$\frac{2}{w}\int_1^{\infty}\frac{du}{\sqrt{1+k^2u^2}\sqrt{u^2-1}}=\frac{4\pi}{w\sqrt{1+k^2}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\Big(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\Big)^2\Big(\frac{1}{1+k^2}\Big)^n.$$

2) $h=-w^2$. И в этом случае из начального положения $\varphi(0)=\varphi_0\neq 0$ точка уходит на бесконечность, причем полное время движения T равно

$$T=\frac{1}{2w}\int_{\varphi_0}^{\infty}\frac{d\varphi}{\mathrm{sh}(\varphi/2)}=\frac{1}{w}\ln\Big|\,\mathrm{cth}\,\frac{\varphi_0}{4}\Big|.$$

При $\varphi(0)=0$ возможно только $\dot{\varphi}\equiv 0$, то есть состояние покоя.

3) $h>-w^2$. В качестве начального условия, т.е. исходной позиции, можно выбрать любое $\varphi_0\geqslant 0$. В зависимости от значений h при вычислении T приходим либо к полным эллиптическим интегралам, значения которых равны

$$\frac{\pi}{2w}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\Big)^2\Big(\frac{k^2-1}{k^2}\Big)^n, k^2=\frac{2w^2}{h+w^2},$$

при $h<w^2$,

$$\frac{\pi k}{2w}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\Big)^2\Big(1-k^2\Big)^n,$$

при $h>w^2$, либо к простому определенному интегралу, дающему $T=\dfrac{\pi}{2w}$.

§ 3. Математический маятник для непараболической алгебры

Определим $Sin\varphi$ и $Cos\varphi$ как соответственно действительную и мнимую части функции $e^{i\varphi}$ на $\mathcal{A}$.

Учитывая определение градиента и скалярного произведения, запишем уравненя для математического маятника:

$$\begin{cases} m\ddot{x}=\dfrac{\lambda}{\alpha+\beta^2}\big(-\beta\dfrac{\partial f}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial x}\big)\\ m\ddot{y}=-mg+\dfrac{\lambda}{\alpha+\beta^2}\big(-\alpha\dfrac{\partial f}{\partial y}-\beta\dfrac{\partial f}{\partial x}\big)\\ \sqrt{y^2+2\beta xy-\alpha x^2}-l=0.\end{cases} \qquad (3)$$

Используя полярные координаты

$$\begin{cases} x=lSin\varphi\\ y=-lCos\varphi,\end{cases}$$

приведем (3) к виду

$$\begin{cases} ml\Big(\alpha Sin\varphi + 2\beta Cos\varphi + 4\beta^2 Sin\varphi\Big)\dot{\varphi}^2 + ml(Cos\varphi + 2\beta Sin\varphi)\ddot{\varphi} = -\lambda Sin\varphi \\ ml(-\alpha Cos\varphi - 2\alpha\beta Sin\varphi)\dot{\varphi}^2 - ml\alpha \cdot Sin\varphi \cdot \ddot{\varphi} = -mg + \lambda Cos\varphi. \end{cases} \tag{4}$$

После преобразований получим систему

$$\begin{cases} ml\alpha\ddot{\varphi} = -mg(\alpha Sin\varphi + 2\beta Cos\varphi + 4\beta^2 Sin\varphi) + \lambda 2\beta \\ -ml\alpha\dot{\varphi}^2 = -mg(Cos\varphi + 2\beta Sin\varphi) + \lambda \end{cases}$$

и уравнение для φ:

$$\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi}^2 = -\frac{g}{l} Sin\varphi. \tag{5}$$

В данном случае ограничимся нахождением первого интеграла уравнения (5):

$$\frac{l}{2g}(24\beta^2 - \alpha)e^{4\beta\varphi}\dot{\varphi}^2 - e^{4\beta\varphi}\Big(Cos\varphi - 4\beta Sin\varphi\Big) = h,$$

где $h = const$.

§ 4. Математический маятник на параболической алгебре

Для параболических чисел имеем $\alpha = -\beta^2$, следовательно,

$$y^2 + 2\beta xy - \alpha x^2 = y^2 + 2\beta xy + \beta^2 x^2 = (y + \beta x)^2.$$

Получим

$$(y + \beta x)^2 = l^2.$$

Таким образом на плоскости параболических чисел математический маятник – это движение по прямым

$$|y + \beta x| = l.$$

Литература

1. В. Ф. Молчанов, Н. А. Малашонок. Некоторые геометрические и физические задачи для плоскости дуального переменного. Державинские чтения V, Матер. научн. конф., февр. 2000, Тамбов, 2000, 5–7.